LOGARITHME NÉPÉRIEN

1. Définition

a. Propriété

La fonction exponentielle étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0\ ;+\infty[$, pour tout réel a strictement positif l'équation $e^x = a$ admet une unique solution.

b. logarithme

Pour tout réel a strictement positif, l'unique solution de l'équation $e^x = a$ s'appelle : logarithme népérien de a. On le note $\ln a$.

c. propriétés immédiates

Pour tout réel $a > 0$, $e^{\ln a} = a$ et pour tout réel b, $\ln\left(e^b\right) = b$.

Pour tout x et tout $y > 0$, $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$.

2. Propriétés algébriques

Pour tout réels a et b strictement positifs, on a :

a. $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.

b. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

c. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

d. $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

e. Pour tout entier n, $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$.

3. Limites variations et représentation graphique

a. La fonction logarithme népérien : $x \rightarrow \ln x$ est strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

Conséquence : Pour a et b strictement positifs,

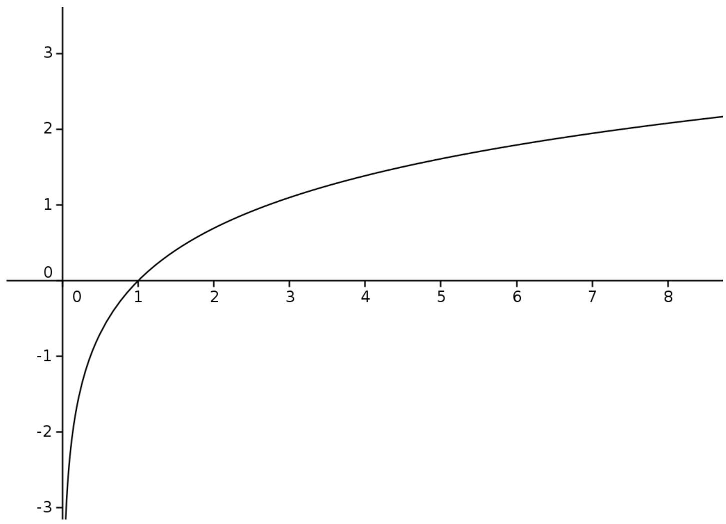
$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ et $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

c. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d. Et la représentation graphique :



4. Deux limites

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$.

5. Dérivées

a. La fonction logarithme népérien est dérivable et sa dérivée est la fonction inverse

(sur $]0\ ;+\infty[$). donc, si $f(x) = \ln x$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Si u est une fonction strictement positive, dérivable et si $f(x) = \ln(u(x))$ alors

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.